**Abstract**

Bu çalışma, bir duvarla sınırlandırılmış kafes yollarının kombinatorik özelliklerini, genişlik, adım sayısı, uzunluk ve alan gibi istatistiklerin sayımı ve analizi üzerinden incelemektedir. Jeneratör fonksiyonlar, kernel yöntemleri ve birebir eşlemeler kullanılarak, bu yollar ile Fibonacci sayıları, Catalan sayıları ve Motzkin yolları gibi bilinen kombinatorik yapılar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Belirli bir bitiş noktasına sahip duvar yollarının Catalan sayıları ile birebir eşleştiği ve Dyck yollarına karşılık geldiği gösterilmiştir. Benzer şekilde, belirli bir adım sayısına sahip duvar yolları ile Fibonacci sayıları arasındaki bağlantı teorik olarak açıklanmıştır. Ek olarak, zirvesiz Motzkin yolları ve bu yolların enumeratif (sayım) özellikleri analiz edilmiştir. Bu bulgular, kafes yollarının sayımı ve ayrık matematikteki uygulamaları için önemli katkılar sağlamaktadır.

**1-Introduction (Giriş)**

Kombinatorik matematikte kafes yolları (lattice paths), birçok teorik ve pratik problemde kritik bir rol oynayan temel yapı taşlarından biridir. Bu yollar, genellikle bir düzlem üzerinde bir başlangıç noktasından bir bitiş noktasına, belirli kurallara bağlı kalarak ilerleyen adım dizileri olarak tanımlanır. Kombinatorik problemlerin çözümlerinde sıkça kullanılan Fibonacci sayıları, Catalan sayıları ve Motzkin yolları gibi klasik kombinatorik diziler, bu yolların farklı varyasyonlarıyla ilişkilendirilir. Yolların sınıflandırılması, sayımı ve bu yapıların genel özelliklerinin anlaşılması, hem matematiksel hem de uygulamalı perspektifte büyük öneme sahiptir.

Bu bağlamda, bir "duvar" ile sınırlandırılmış yollar, klasik kafes yollarının doğal bir genelleştirmesidir. Duvar, N^2 düzleminde belirli bir düzen içinde yerleştirilmiş 1×2 boyutunda tuğlalar (tiles) ile oluşturulmuş özel bir alt ızgara olarak tanımlanmıştır. Bu yapı, kafes yollarının geometrik sınırlandırılmasını sağlar. Bu yollar, belirli bir alan içinde hareket ederken, geometrik sınırlamalara ve başlangıç-bitiş koşullarına tabidir.

diyagram, çizgi, taslak, dikdörtgen içeren bir resim

Açıklama otomatik olarak oluşturuldu

Pathwall makalesi, bu tür yolların kombinatorik özelliklerini ve iyi bilinen matematiksel dizilerle ilişkilerini inceleyen önemli bir çalışma olarak öne çıkmaktadır. Bu çalışma kapsamında incelenen yollar, yukarı (N = (0, 1)), aşağı (S = (0, −1)) ve yatay (E1 = (1, 0), E2 = (2, 0)) adımlardan oluşmaktadır. Bu tanım, farklı kombinatorik yapıların analizi için temel teşkil eder.

diyagram, çizgi, ekran görüntüsü, plan içeren bir resim

Açıklama otomatik olarak oluşturuldu

**Bu çalışmanın ana hedefleri şunlardır:**

1. **Duvar Yollarının Sayımı:** Duvar yollarının kombinatorik özelliklerini inceleyerek, bu yolların Fibonacci, Catalan ve Motzkin dizileriyle ilişkisini ortaya koymak.
2. **Birebir Eşlemeler (Bijection):** Duvar yolları ile klasik kombinatorik yapılar arasında birebir eşleştirme yöntemlerini uygulamak ve bu yöntemlerin matematiksel temelini açıklamak.
3. **Jeneratör Fonksiyonlar ve Kernel Yöntemi:** Duvar yollarının sayımında jeneratör fonksiyonlar ve kernel yönteminin kullanımını detaylandırarak bu araçların uygulamalı gücünü göstermek.
4. **Zirvesiz Motzkin Yolları:** Pathwall makalesinde öne çıkan zirvesiz (peakless) Motzkin yollarını inceleyerek bu yolların enumeratif özelliklerini ve genişletilmiş kombinatorik yapılara nasıl genellenebileceğini açıklamak.

**Kombinatorik Bağlantılar:** Catalan sayıları, özellikle Dyck yolları gibi kafes yapılarının enumerasyonunda merkezi bir rol oynar. Pathwall makalesinde, belirli bir genişliğe sahip ve x-eksenine sonlanan duvar yollarının, birebir bir eşleme ile Catalan sayılarına karşılık geldiği gösterilmiştir. Benzer şekilde, belirli bir adım sayısına sahip yolların Fibonacci sayıları ile ilişkilendirildiği ve bu yolların Motzkin yollarıyla bağlantılı olduğu ortaya konmuştur. Zirvesiz Motzkin yolları gibi daha karmaşık yapıların analizi ise, kombinatorik problemlerin çözümünde jeneratör fonksiyonlar ve kernel yönteminin gücünü bir kez daha ortaya koymaktadır.

**Bu çalışmanın katkıları:**

* Pathwall makalesinin sunduğu teorik bulguları derinlemesine inceleyerek, bu yolların kombinatorik yapıların genelleştirilmesine nasıl katkı sağladığını göstermek.
* Duvar yollarını klasik Fibonacci ve Catalan dizilerinin ötesine taşıyarak, bu yapıların yeni varyasyonlarını ve genişletmelerini analiz etmek.
* Uygulamalı matematik perspektifinden, bu yolların olası algoritmik çözümleri ve görselleştirme yöntemlerini önererek bu tür problemlerin daha geniş bir bağlamda ele alınmasını sağlamak.

Bu çalışma, Pathwall makalesinin bulgularını temel alarak, duvar yollarının ve bağlantılı kombinatorik yapıların daha geniş bir bağlama oturtulmasını hedeflemektedir. Ayrıca, jeneratör fonksiyonlar ve kernel yöntemi gibi güçlü matematiksel araçların kombinatorik problemlerin çözümündeki önemini vurgulamaktadır.

**2-Preliminaries (Temel Kavramlar)**

Bu bölümde, duvar yollarının analizi için gerekli olan temel matematiksel kavramlar ve yöntemler tanıtılacaktır. Çalışmamızın temeli, Fibonacci ve Catalan sayı dizilerinin özellikleri ile Motzkin yolları gibi kombinatorik yapılar arasındaki ilişkiler üzerine kuruludur.

**1. Lattice Paths (Kafes Yolları)**

Kafes yolları, bir düzlemde tanımlı belirli bir başlangıç ve bitiş noktası arasında hareket eden yolları ifade eder. Adım türleri genellikle şu şekilde sınıflandırılır:

* Yukarı adım: N=(0,1)N = (0, 1)N=(0,1)
* Aşağı adım: S=(0,−1)S = (0, -1)S=(0,−1)
* Yatay adımlar: E1=(1,0),E2=(2,0)E\_1 = (1, 0), E\_2 = (2, 0)E1​=(1,0),E2​=(2,0)

Duvar yolları, bu adımların bir kombinasyonu ile oluşturulan ve bir duvar ile sınırlandırılmış özel bir kafes yol sınıfıdır.

diyagram, çizgi, plan, metin içeren bir resim

Açıklama otomatik olarak oluşturuldu

**2. Fibonacci Sayıları**

Fibonacci dizisi, F0=0, F1​=1 başlangıç koşulları ve Fn=Fn−1+Fn−2 ​ rekürrens ilişkisi ile tanımlanır. Fibonacci sayıları, belirli adım sayısına sahip yolların enumerasyonu için kritik bir rol oynar. Örneğin, belirli uzunluktaki zirvesiz yollar, Fibonacci sayıları ile ilişkilendirilir​.

**3. Catalan Sayıları**

Catalan sayıları, özellikle Dyck yollarının enumerasyonunda kullanılır. Rekürrens ilişkisi ve kapalı formülasyonu şu şekildedir:

yazı tipi, diyagram, çizgi, metin içeren bir resim

Açıklama otomatik olarak oluşturuldu

**4. Motzkin Yolları ve Zirvesiz Motzkin Yolları**

Motzkin yolları, yukarı, yatay ve aşağı adımlardan oluşur ve y≥0y koşulunu sağlar. Zirvesiz Motzkin yollarında, bir U adımından hemen sonra bir D adımı gelemez. Bu yolların enumerasyonu için jeneratör fonksiyonu şu şekilde tanımlanabilir:

yazı tipi, metin, çizgi, ekran görüntüsü içeren bir resim

Açıklama otomatik olarak oluşturuldu

diyagram, çizgi, plan, yazı tipi içeren bir resim

Açıklama otomatik olarak oluşturuldu

**5. Generating Functions (Jeneratör Fonksiyonlar)**

Jeneratör fonksiyonlar, kombinatorik dizilerin enumerasyonunu sağlayan araçlardır. Dyck yollarının jeneratör fonksiyonu şu şekilde ifade edilir:

yazı tipi, çizgi, diyagram, ekran görüntüsü içeren bir resim

Açıklama otomatik olarak oluşturuldu

Pathwall makalesinde, çok değişkenli jeneratör fonksiyonlar kullanılarak duvar yollarının uzunluk, genişlik ve alan gibi istatistikleri analiz edilmiştir​.

**6. Kernel Method (Kernel Yöntemi)**

Kernel yöntemi, jeneratör fonksiyonların çözümünde kullanılan güçlü bir analitik tekniktir. Kombinatorik problemlerde sıklıkla, rekürrens ilişkilerden türetilen jeneratör fonksiyonların köklü ifadelerini sıfıra eşitleyerek çözümler sunar. Bu yöntem, özellikle çok değişkenli jeneratör fonksiyonlarının çözümünde kritik bir rol oynar.

Bir jeneratör fonksiyon, genellikle şu formda tanımlanır:



burada K(z,F), jeneratör fonksiyonunun bir kernel terimini ifade eder. Kernel terimi sıfıra eşitlendiğinde, jeneratör fonksiyonunun çözümü numaratör teriminin denominatör terimine bölümüyle basitleştirilir ve bu sayede kombinatorik yapıların enumerasyonu sağlanır.

**2. Dyck Yolları Örneği**

Dyck yolları için jeneratör fonksiyonu C(z), şu rekürrens ilişkiyi sağlar:



Bu ifadeyi kernel yöntemiyle çözmek için K(z,C(z))K(z, C(z))K(z,C(z)) şu şekilde ifade edilir:



Kernel terimi sıfıra eşitlenerek, C(z)C(z)C(z) için çözüm bulunur:

yazı tipi, çizgi, ekran görüntüsü, diyagram içeren bir resim

Açıklama otomatik olarak oluşturuldu

Bu çözüm, Dyck yollarının enumerasyonu için kullanılan Catalan sayılarıyla ilişkilidir:

yazı tipi, diyagram, çizgi, beyaz içeren bir resim

Açıklama otomatik olarak oluşturuldu

**3. Zirvesiz Motzkin Yolları Örneği**

Zirvesiz (peakless) Motzkin yolları, (0, 0) noktasından başlayarak yatay (H), yukarı (U), veya aşağı (D) adımları kullanarak (n, 0) noktasına ulaşan ve y≥0 koşulunu sağlayan yollar olarak tanımlanır. Zirvesiz olması, U adımının hemen ardından D adımı olmamasını gerektirir. Bu kısıtlama, bu yolların sayımını ve oluşturulmasını etkiler.

Zirvesiz Motzkin yollarının jeneratör fonksiyonu, şu rekürrens ilişkiyi sağlar:



Burada kernel terimi şu şekilde ifade edilir:



Kernel terimini sıfıra eşitleyerek M(z) için çözüm bulunur:

metin, yazı tipi, çizgi, ekran görüntüsü içeren bir resim

Açıklama otomatik olarak oluşturuldu

Bu fonksiyon, zirvesiz Motzkin yollarının enumerasyonu için kullanılabilir ve yolların her uzunluk için sayısını belirler.

**4. Çok Değişkenli Kernel Fonksiyonları**

Kernel yöntemi, çok değişkenli jeneratör fonksiyonlar için de uygulanabilir. Örneğin, Pathwall makalesinde duvar yolları için jeneratör fonksiyonu şu şekilde ifade edilmiştir:

yazı tipi, beyaz, çizgi, metin içeren bir resim

Açıklama otomatik olarak oluşturuldu

burada an,k ​, n-adımlı ve genişliği k olan yolların sayısını temsil eder. Kernel terimi, bu tür problemlerde şu şekilde kullanılır:



Kernel terimi sıfıra eşitlenerek, S(z,u) çözülür ve yolların farklı istatistikler altındaki dağılımları hesaplanabilir. Kernel yöntemi, çok değişkenli jeneratör fonksiyonlar için kapalı formda çözümler sağlar, karmaşık kombinatorik yapıların enumerasyonunu basitleştirir kombinatorik problemlerin asimptotik analizine olanak tanır.

**3-Problem Definition and Objectives (Problem Tanımı ve Amaçlar)**

Bu bölüm, çalışmamızın ele aldığı temel problemleri ve bu problemlerin çözümüne yönelik belirlediğimiz amaçları detaylandırmaktadır.

**1. Problem Tanımı**

Kafes yolları (lattice paths), N2\mathbb{N}^2N2 düzleminde belirli bir başlangıç noktasından bir bitiş noktasına ilerleyen ve belirli kurallara tabi adımlardan oluşan yollar olarak tanımlanır. Bu çalışmada, bir "duvar" ile sınırlandırılmış kafes yollarının kombinatorik özellikleri incelenmektedir. Problem, üç temel yapı üzerine odaklanır:

1. **Catalan Sayıları ve Duvar Yolları**:
   * Belirli bir genişliğe sahip ve xxx-eksenine sonlanan duvar yolları, Catalan sayıları ile birebir eşleşmektedir.
   * Bu yolların sayımı, Dyck yolları gibi klasik kombinatorik yapılarla ilişkilendirilmiştir.
2. **Fibonacci Sayıları ve Duvar Yolları**:
   * Adım sayısına göre sınırlı olan yollar, Fibonacci sayıları ile ilişkilendirilmiştir. Bu yolların birebir eşleşmeleri teorik temellere dayandırılmıştır.
3. **Zirvesiz Motzkin Yolları**:
   * Duvar yollarının bir alt kümesi olan zirvesiz Motzkin yolları, bu çalışmada ele alınmıştır. Bu yollar, Motzkin sayıları ile birebir eşleşerek farklı kombinatorik problemlerin çözümüne olanak tanır.

**2. Çalışmanın Ana Hedefleri**

Bu çalışmanın temel amacı, Pathwall makalesinde sunulan problemlerin ve çözümlerin kapsamını genişleterek, kombinatorik matematikte duvar yollarının analizi üzerine özgün katkılar sunmaktır. Belirlenen hedefler şunlardır:

1. **Kombinatorik İlişkilerin İncelenmesi**:
   * Duvar yolları ile Catalan, Fibonacci ve Motzkin dizileri gibi klasik kombinatorik yapılar arasındaki ilişkileri açıklamak.
   * Özellikle birebir eşleme (bijection) yöntemlerini kullanarak bu ilişkilerin teorik temellerini vurgulamak.
2. **Jeneratör Fonksiyonlarının Kullanımı**:
   * Duvar yollarının genişlik, uzunluk ve alan gibi istatistiksel özelliklerini analiz etmek için jeneratör fonksiyonların nasıl kullanılacağını göstermek.
   * Kernel yöntemi gibi analitik araçları uygulayarak bu fonksiyonları çözmek.
3. **Zirvesiz Motzkin Yollarının Analizi**:
   * Zirvesiz Motzkin yollarının enumerasyonuna odaklanmak ve bu yolların diğer kombinatorik yapılara genişletilebilirliğini araştırmak.
   * Bu yolların genelleştirilmiş varyasyonları ile potansiyel uygulamalarını incelemek.
4. **Asimptotik ve Sayısal Analiz**:
   * Duvar yollarının uzunluk, genişlik ve alan gibi parametrelere göre dağılımlarını analiz etmek.
   * Bu analizlerin kombinatorik yapıların asimptotik davranışlarını anlamaya katkı sağladığını göstermek.